МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Национальный исследовательский университет
Новосибирский государственный университет
Факультет естественных наук

Математический анализ

Программа лекционного курса, семинаров, коллоквиумов и самостоятельной работы студентов

Курс 1, I-II семестры, Курс 2, I семестр

Учебно-методический комплекс

Новосибирск 2012

Учебно-методический комплекс «Математический анализ» предназначен для студентов I-II курсов факультета естественных наук, специальность «биология». В состав пособия включены: программы курсов лекций и семинаров, программы коллоквиумов и типовых задач с решениями. Кроме того, приведен набор задач для самостоятельной работы студентов, даны примеры вариантов контрольных работ, и задач, предлагавшихся на экзаменах за прошлые годы. Авторы выражают признательность доценту В.В.Бублику и ассистенту С.В.Мальцевой за предоставленные материалы.

Составители

доц. Ж.Л.Мальцева, проф. М.В.Фокин

УМК подготовлен в рамках реализации
«Программы развития НИУ-НГУ»

Содержание

Аннотация рабочей программы

Дисциплина «Математический анализ» является частью математического и естественнонаучного цикла ООП по направлению подготовки «020400 Биология», квалификация (степень) «бакалавр». Дисциплина реализуется на Факультете естественных наук Федерального государственного образовательного бюджетного учреждения высшего профессионального образования Новосибирский государственный университет (НГУ) кафедрой Высшей математики Механико-математического факультета.

Предлагаемый курс математического анализа освещает вопросы, связанных со свойствами функций вещественных переменных (дифференциальным, интегральным исчислением функций одной и многих переменных), элементами дифференциальных уравнений и теории устойчивости и их приложениями в рамках естественных наук.

Результаты освоения дисциплины «Математический анализ» используются в следующих дисциплинах данной ООП: теория вероятностей и математическая статистика; физика; основы компьютерной грамотности; физическая химия; охрана окружающей среды; методы вычислений.

Дисциплина нацелена на формирование у выпускника общекультурных компетенций: ОК-3, ОК-6, ОК-8, ОК-12; профессиональных компетенций ПК-1, ПК-3, ПК-4.

Преподавание дисциплины предусматривает следующие формы организации учебного процесса: лекции, семинарские занятия, контрольные работы, коллоквиумы, домашние и семестровые задания, консультации, сдача зачетов и экзаменов, самостоятельная работа студента.

Общая трудоемкость дисциплины «Математический анализ» (за три семестра) составляет 12 зачетных единиц. Всего 432 академических часа. Программой дисциплины «Математический анализ» предусмотрены 162 часов лекций, 148 часов семинаров, 122 часа самостоятельной работы.

По семестрам:
Экзаменов 2 +1, зачетов 2, колл 2+1, контр 6+3, заданий 6+3
I: 64 л + 72 сем + 44 сам.раб. = 180 часа,
II: 64 л + 42 сем + 38 сам.раб. = 144 часа,
III: 34 л + 34 сем + 40 сам.раб. = 108 часов.

1. Цели освоения дисциплины

Дисциплина «Математический анализ», предлагаемая студентам факультета естественных наук, изучает функции одного и нескольких вещественных переменных (теорию пределов, дифференциальное и интегральное исчисление), числовые и функциональные ряды, основы теории дифференциальных уравнений и теории устойчивости, принципы построения и свойства простейших биологических моделей. Помимо воспитания в студентах элементов математической культуры, необходимых в любой области знания, основной целью освоения указанной дисциплины является формирование понимания общих принципов решения задач математического анализа и дифференциальных уравнений и отработка навыков решения конкретных задач, воспитание у студентов логического мышления и умения строить обоснованные цепочки высказываний, видения поставленной проблемы в целом и умения применять особенности прикладных задач, обучить учащихся основным теоретическим понятиям и практическим методам математического анализа, на примерах конкретных задач отработать классические методы, приемы и алгоритмы, необходимые студентам в дальнейших курсах обучения.

Для достижения поставленной цели выделяются следующие задачи курса:

— получить основные представления о теории множеств, теории действительных чисел;

— изучение теоретических понятий и отработка методов теории пределов, дифференциального и интегрального исчисления функций одной и многих переменных, теории числовых и функциональных рядов;

— введение в элементарную теорию и овладение навыками решения обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных;
— получить основные представления о теории устойчивости и методах построения математических моделей биологических систем.

Требования к уровню освоения содержания курса дисциплины.
По окончании изучения дисциплины студент должен
— иметь представление о

1. математическом анализе как науке, изучающей функции и отображения множеств и его значении в математическом моделировании естественнонаучных явлений;
2. простейших методах построения математических моделей биологических систем;

— знать

1. Элементы теории множеств.
2. Функции одной и нескольких вещественной переменной.
3. Числовые последовательности.
4. Предел функции одной и нескольких .
5. Непрерывность функции. Равномерная непрерывность функций.
6. Производные и дифференциалы функции одной и нескольких переменных.
7. Формула Тейлора.
8. Неопределенный интеграл.
9. Числовые и функциональные ряды.
10. Производная по направлению и градиент функции.
11. Метод наименьших квадратов.
12. Функциональная зависимость.
13. Условный экстремум. Функция Лагранжа.
14. Многомерные интегралы. Принципы вычисления.
15. Криволинейные и поверхностные интегралы.
16. Формула Грина.
17. Векторное поле. Дивергенция векторного поля.
18. Формула Гаусса – Остроградского.
19. Ротор векторного поля. Циркуляция.
20. Формула Стокса.

21. Дифференциальное уравнение первого порядка и задача Коши, общее и частное решения.
22. Классификация простейших дифференциальных уравнений первого порядка. Уравнения с разделяющимися переменными, однородные уравнения, линейные уравнения, Бернулли, уравнения в полных дифференциалах, интегрирующий множитель.
23. Методы нахождения частного решения: метод вариации произвольных постоянных, специальная правая часть.
24. Системы дифференциальных уравнений первого порядка. Постановка задачи Коши.
25. Дифференциальные уравнения n-го порядка.
26. Линейная зависимость и независимость функций.
27. Определитель Вронского.
28. Фундаментальная система решений линейного уравнения n-го порядка.
29. Построение общего решения линейного неоднородного уравнения n-го порядка в зависимости от набора корней характеристического уравнения.
30. Гармонические колебания. Уравнение осциллятора. Резонанс.
31. Системы линейных ОДУ первого порядка.
32. Линейная зависимость вектор – функций. Определитель Вронского для вектор – функций.
33. Устойчивость решения по Ляпунову, асимптотическая устойчивость. Устойчивость по первому приближению. Функция Ляпунова.
34. Квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка. Характеристики.
35. Математические модели популяций: изолированный вид в условиях конкуренции, два вида в борьбе за источники существования, хищник – жертва.
36. Волновое уравнение. Постановка начально-краевой задачи. Метод Фурье. Задача Штурма – Лиувилля.

— ***уметь***

1. логически выстраивать математические рассуждения;
2. вычислять пределы функций;

3. вычислять производные функций одной и многих переменных;
4. вычислять неопределенные интегралы;
5. вычислять определенные интегралы, исследовать сходимость несобственных интегралов;
6. исследовать на сходимость числовые ряды, находить области сходимости функциональных рядов, разлагать функции в степенные ряды и ряды Фурье;
7. исследовать функции методами дифференциального исчисления, качественно строить графики функций;
8. вычислять многомерные , криволинейные и поверхностные, применять формулы Грина, Сток~~са,~~ Гаусса Остроградского:
9. интегрировать обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка, решать задачу Коши;
10. интегрировать неоднородные линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами,
11. интегрировать неоднородные системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами;
12. исследовать поведение решения вблизи особых точек динамической системы второго порядка, устойчивость решения по линейному приближению;
13. исследовать простейшие математические модели, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями и системами уравнений;
14. интегрировать квазилинейные дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка, решать задачу Коши;

2. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина «Математический анализ» является частью математического и естественнонаучного цикла ООП, базовая часть (общепрофессиональные дисциплины), по направлению подготовки «020400 БИОЛОГИЯ», уровень подготовки – «бакалавр».

Дисциплина «Математический анализ» опирается на следующую дисциплину данной ООП:

- высшая алгебра;

Результаты освоения дисциплины «Математический анализ» используются в следующих дисциплинах данной ООП:

- теория вероятностей и математическая статистика;
- физика (механика);
- физика (электродинамика);
- физика (квантовая механика);
- физика (термодинамика и статистическая физика);
- основы компьютерной грамотности;
- физическая химия;
- охрана окружающей среды;
- методы вычислений.

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины «Математический анализ»:

общекультурные компетенции:

- приобретает новые знания и формирует суждения по научным, социальным и другим проблемам, используя полученное базовое образование, а также современные образовательные и информационные технологии (ОК-3);
- использует в познавательной и профессиональной деятельности базовые знания в области математики и естественных наук, применяет методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования (ОК-6);
- проявляет экологическую грамотность и использует базовые знания в области биологии в жизненных ситуациях; понимает социальную значимость и умеет прогнозировать последствия своей профессиональной деятельности, готов нести ответственность за свои решения (ОК-8);
- использует основные технические средства в

профессиональной деятельности: работает на компьютере и в компьютерных сетях, использует универсальные пакеты прикладных компьютерных программ, создает базы данных на основе ресурсов Интернет, способен работать с информацией в глобальных компьютерных сетях (ОК-12).

Профессиональные компетенции:

- демонстрирует базовые представления о разнообразии биологических объектов, понимание значения биоразнообразия для устойчивости биосферы (ПК-1);
- демонстрирует знание принципов структурной и функциональной организации биологических объектов и механизмов гомеостатической регуляции; применяет основные физиологические методы анализа и оценки состояния живых систем (ПК-3);
- демонстрирует знание принципов клеточной организации биологических объектов, биофизических и биохимических основ, мембранных процессов и молекулярных механизмов жизнедеятельности (ПК-4).

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

- <u>иметь представление</u> о фундаментальных основах математического анализа;
- <u>знать</u> алгоритмы решения базовых задач, основанных на применении дифференциального и интегрального исчислений, теории рядов, теории дифференциальных уравнений;
- <u>уметь</u> применять полученные знания при моделировании процессов физики, химии, биологии;
- <u>быть готовым</u> к педагогической деятельности в общеобразовательных учреждениях.

4. Структура и содержание дисциплины

Программой дисциплины «Математический анализ» предусмотрены 162 часа лекций, 148 часов семинаров и 122 часа самостоятельной работы, т.е. 12 зачетных единиц.

Блочная программа курса

№ п/п	Наименование разделов и тем	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)		
		Лекции	Семинары	Самост. работа
	1 курс, I семестр			
1	Теория множеств. Отображения и функции	6	4	-
2	Теория пределов функций	6	8	-
3	Непрерывные функции	8	6	-
4	Контрольная работа	-	2	8
5	Дифференциальное исчисление	4	4	
6	Теоремы дифференциального исчисления. Формула Тейлора	6	10	-
7	Экстремумы функций. Исследование функций	4	6	-
8	Контрольная работа	-	2	8
9	Коллоквиум	-	2	8
10	Неопределенные интегралы. Свойства и приемы вычисления	4	6	-
11	Определенный интеграл и его свойства. Приложения	8	6	-
12	Несобственные интегралы	2	2	-
13	Числовые ряды	6	6	-
14	Функциональные ряды	10	4	
15	Контрольная работа	-	4	8
16	Зачет, экзамен	-	-	12
	Итого	64	72	44

1 курс, II семестр

1	Функции многих переменных	6	2	-
2	Частные производные. Дифференциал. Градиент и производная по направлению	6	6	-
3	Элементы комбинаторики Формула Тейлора	6	2	-
4	Многомерные отображения. Функциональная зависимость	6	2	-
	Функции, заданные неявно	8	4	
5	Экстремумы функций многих переменных	6	6	-
6	Коллоквиум	-	2	5
7	Контрольная работа	-	2	10
8	Интегралы, зависящие от параметра	4	-	
9	Многомерные интегралы. Приложения	10	6	-
10	Криволинейные интегралы	6	4	-
11	Поверхностные интегралы	6	4	-
12	Контрольная работа	-	2	10
13	Зачет, экзамен	-		13
	Итого	64	42	38
	2 курс, I семестр			
1	Уравнения первого порядка. Задачи Коши, интегрируемые уравнения.	8	6	-
2	Линейные уравнения n-го порядка	10	8	-
3	Системы линейных уравнений	4	8	-
4	Контрольная работа	-	2	8
5	Коллоквиум	-	-	2
6	Устойчивость	4	4	-
7	Уравнения с частными производными первого порядка	2	4	-
8	Приложения теории дифференциальных уравнений к задачам физики и биологии	6	-	-
9	Контрольная работа	-	2	8
10	Экзамен	-	-	22
11	Итого	34	34	40
	Итого	**162**	**148**	**122**

Программа курса лекций

1 курс, I семестр

Функции одной переменной

Теория множеств и функций. Пределы.

Лекция 1

Множества. Операции над множествами. Свойства операций. Декартово произведение множеств.

Лекция 2

Отображения и функции. Основные классы отображений. График отображения, суперпозиция отображений, обратное отображение (функция).

Лекция 3

Числовые функции и способы их задания. Уравнение кривой на плоскости. Кривые второго порядка. Основные типы числовых функций, элементарные функции.

Лекция 4

Предел функции в точке. Первый замечательный предел. Теорема о сохранении знака. Единственность предела. Предельный переход в неравенстве. Односторонние пределы.

Лекция 5

Понятие бесконечно малой. Свойства бесконечно малых. Предел суммы, произведения, частного.

Лекция 6

Предел функции при $x \to \infty$; бесконечные пределы. Сравнение бесконечно малых.

Лекция 7

Непрерывность функции в точке. Непрерывность суммы, произведения, частного, суперпозиции непрерывных функций.

Лекция 8

Предельный переход по последовательности значений аргумента. Точки разрыва и их классификация.

Лекция 9

Свойства функций, непрерывных на отрезке: теорема Больцано – Коши и следствия из нее, теоремы Вейерштрасса.

Лекция 10

Существование и непрерывность обратной функции. Определение равномерной непрерывности. Теорема Кантора.

Дифференциальное исчисление.

Лекция 11

Производная функции в точке. Геометрический и физический смысл производной. Уравнение касательной к графику функции. Непрерывность дифференцируемой функции. Производная суммы, произведения, частного.

Лекция 12

Производная обратной функции; суперпозиции функций. Вычисление производных основных элементарных функций.

Лекция 13

Понятие локального экстремума. Необходимое условие экстремума (теорема Ферма). Теоремы Ролля, Коши и Лагранжа. Следствия.

Лекция 14

Дифференциал функции. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора. Ее применение в приближенных вычислениях.

Лекция 15

Правила Лопиталя. Промежутки возрастания и убывания дифференцируемой функции. Достаточные условия экстремума.

Лекция 16

Выпуклость функции на промежутке. Связь со второй производной. Точки перегиба. Асимптоты графика функции.

Интегральное исчисление.

Лекция 17

Первообразная. Описание множества всех первообразных для данной функции на промежутке. Неопределенный интеграл, его основные свойства. Интегрирование по частям и замена переменной в неопределенном интеграле.

Лекция 18

Определенный интеграл как приращение первообразной. Его основные свойства. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле. Теорема о среднем.

Лекция 19

Два принципа применения определенного интеграла. Понятие площади фигуры. Вычисление площадей с помощью интегрирования. Использование полярных координат.

Лекция 20

Существование первообразной для непрерывной функции. Интеграл как предел интегральных сумм. Приближенное вычисление интеграла, квадратурные формулы. Оценка ошибки в формуле прямоугольников.

Лекция 21

Вычисление длины кривой, площади поверхности вращения, объема тела вращения с помощью интегрирования.

Лекция 22

Несобственные интегралы: для функции с особенностью в одном из концов ограниченного промежутка интегрирования; интеграл по неограниченному промежутку. Признаки сходимости.

Теория рядов.

Лекция 23

Числовые ряды. Необходимое условие сходимости. Признаки сходимости знакопостоянных рядов: сравнения, интегральный, Даламбера, Коши.

Лекция 24

Знакопеременные ряды. Абсолютная сходимость. Признак Лейбница.

Лекция 25

Поточечная и равномерная сходимости последовательности функций, заданных на промежутке. Предельный переход под знаком интеграла. Непрерывность предела равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций на промежутке.

Лекция 26

Степенные ряды. Радиус сходимости. Равномерная сходимость последовательности частичных сумм. Непрерывность суммы степенного ряда.

Лекция 27

Интегрирование и дифференцирование суммы степенного ряда. Единственность разложения функции в степенной ряд.

Лекция 28

Скалярное произведение функций. Неравенство Коши-Буняковского. Свойства тригонометрической системы функций.

Лекция 29

Тригонометрические многочлены, формулы для восстановления их коэффициентов. Разложение периодической функции в ряд Фурье. Достаточные условия сходимости ряда Фурье к значению функции в точке. Примеры.

1 курс, II семестр

АНАЛИЗ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Дифференциальное исчисление.

Лекция 1

Открытые и замкнутые множества в R^n. Способы задания функции многих переменных, ее график. Предел функции в точке. Непрерывность. Свойства непрерывных функций.

Лекция 2

Частные производные первого порядка. Полный дифференциал. Достаточное условие дифференцируемости функции. Уравнение плоскости, касательной к поверхности (графику функции).

Лекция 3

Производная по направлению. Градиент функции, его геометрический смысл. Непрерывность суперпозиции, ее дифференцирование.

Лекция 4

Элементы комбинаторики: размещения, перестановки, сочетания, определение их числа. Бином Ньютона. Сочетания с повторениями. Примеры решения некоторых задач комбинаторики.

Лекция 5

Производные и дифференциалы высших порядков. Теорема о равенстве смешанных производных.

Лекция 6

Формула Тейлора для функций многих переменных. Применение в приближенных вычислениях.

Лекция 7

Многомерные отображения. Дифференциал отображения. Матрица Якоби. Якобиан отображения, его геометрический смысл. Понятие функциональной зависимости. Достаточное условие независимости функций.

Лекция 8

Функции одной и нескольких переменных, заданные неявно. Теоремы о существовании, единственности и непрерывности неявных функций.

Лекция 9

Теорема о дифференцируемости неявной функции. Многомерные отображения, заданные неявно. Обратное отображение.

Лекция 10

Локальные экстремумы функций многих переменных. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума.

Лекция 11

Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа. Построение эмпирических формул методом наименьших квадратов.

Интегральное исчисление

Лекция 12

Интегралы, зависящие от параметра. Непрерывность, дифференцирование по параметру. Теорема Фубини.

Лекция 13

Многомерные интегралы. Общие принципы определения интегралов, следствия из них.

Лекция 14

Двойной интеграл. Его приложения в геометрии и физике. Замена переменных в двойном интеграле.

Лекция 15

Тройной интеграл. Его приложения в задачах геометрии и физики. Замена переменных (переход к цилиндрическим, сферическим координатам).

Лекция 16

Длина кривой, заданной параметрически. Определение и свойства криволинейного интеграла первого рода. Его приложения в физике.

Лекция 17

Криволинейный интеграл второго рода, его свойства и физический смысл. Сведение к интегралу первого рода.

Лекция 18

Формула Грина. Вычисление площади области, ограниченной замкнутым контуром на плоскости. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования. Восстановление функции по ее частным производным.

Лекция 19

Поверхность. Нормаль к поверхности, двусторонние поверхности. Площадь поверхности. Определение и свойства поверхностного интеграла первого рода. Его приложения.

Лекция 20

Определение и свойства поверхностного интеграла второго рода, его физический смысл. Приведение к интегралу первого рода.

Лекция 21

Формулы Остроградского и Стокса. Их физическая интерпретация.

2 курс, I семестр

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Уравнения первого порядка

Лекция 1

Введение. Общее и частное решения дифференциальных уравнений. Задача Коши. Геометрическая интерпретация дифференциального уравнения 1 порядка, поле направлений. Изоклины. Уравнения с разделяющимися переменными.

Лекция 2

Однородные дифференциальные уравнения и приводящиеся к ним. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Метод множителей Лагранжа.

Лекция 3

Уравнение Бернулли. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.

Лекция 4

Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Метод ломаных. Метод последовательных приближений.

Уравнения порядка выше первого

Лекция 5

Уравнения, не разрешенные относительно производной. Простейшие случаи понижения порядка дифференциальных уравнений. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков. Общее и частное решения. Определитель Вронского. Свойства решений однородного уравнения. Формула Остроградского – Лиувилля.

Лекция 6

Линейные однородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Построение фундаментальной системы решений. Общее и частное решения. Независимость системы функций.

Лекция 7

Свойства определителя Вронского. Общее решение линейного уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Алгоритм построения.

Лекция 8

Линейные неоднородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Метод вариации произвольных постоянных. Специальная правая часть.

Лекция 9

Дифференциальные уравнения свободных колебаний. Зависимость решения от входных параметров задачи. Гармонические колебания. Вынужденные колебания. Резонанс.

Система автономных уравнений первого порядка. Сведение к одному уравнению. Геометрическая интерпретация. Фазовая плоскость.

Системы дифференциальных уравнений

Лекция 10

Линейные системы дифференциальных уравнений. Общие свойства решений. Линейная зависимость вектор-функций. Фундаментальная система решений. Общее решение. Алгоритм построения.

Лекция 11

Линейные системы n-го порядка с постоянными коэффициентами. Методы построения фундаментальной системы решений. Общее решение. Метод вариации произвольных постоянных. Специальная правая часть. Интегрирований дифференциальных уравнений с помощью рядов. Примеры. Краевые задачи: постановка и разрешимость.. Задача Штурма – Лиувилля.

Теория устойчивости.

Лекция 12

Устойчивость решений систем дифференциальных уравнений. Устойчивость тривиального решения автономной системы второго порядка. Геометрическая интерпретация. Фазовая плоскость. Особые точки и их классификация.

Лекция 13

Теорема об устойчивости состояния равновесия для линейной системы. Критерий Гурвица. Теорема об устойчивости по линейному приближению. Функция Ляпунова. Теорема Ляпунова об устойчивости.

Квазилинейные уравнения в частных производных

Лекция 14

Уравнения в частных производных. Квазилинейные уравнения в частных производных. Система уравнений характеристик. Вид общего решения уравнения в частных производных. Задача Коши.

Приложения теории дифференциальных уравнений в задачах физики и биологии

Лекция 15

Применение дифференциальных уравнений для описания развития популяций. Простейшая модель развития изолированной популяции. Свойства решений. Развитие изолированной популяции в условиях внутривидовой конкуренции. Развитие двух видов в борьбе за источники существования.

Лекция 16

Математическая модель развития популяции хищник – жертва. Фазовые кривые.

Лекция 17

Волновое уравнение. Постановка начально-краевой задачи. Метод Фурье.

Основные понятия и определения

1-й курс, I семестр

1. Элементы теории множеств. Объединение и пересечение множеств, разность, дополнение. Пустое множество.
2. Отображения множеств. Основные виды отображений. Суперпозиция отображений. Обратное отображение.
3. Функции вещественной переменной. Способы задания функции. Элементарные функции.
4. Числовые последовательности.
5. Кривые второго порядка: эллипс, гипербола, парабола. Их геометрические свойства.
6. Предел функции в точке.
7. Бесконечно малые величины. Их свойства.
8. Односторонние пределы. Бесконечные пределы. Предел при $x \to \pm\infty$.
9. Предел числовой последовательности.
10. Непрерывность функции в точке. Точки разрыва и их классификация.
11. Непрерывность суперпозиции функций.
12. Свойства функций, непрерывных на отрезке.
13. Равномерная непрерывность функций.
14. Производная функции в точке. Ее геометрический смысл. Уравнение касательной к графику функции.
15. Производная обратной функции, суперпозиции функций.
16. Производные основных элементарных функций.
17. Дифференциал функции в точке. Его применение в приближенных вычислениях.
18. Производные и дифференциалы высших порядков.
19. Возрастание и убывание функции на промежутке. Связь со значениями производной.
20. Выпуклость функции на промежутке. Точки перегиба.
21. Локальные экстремумы функции. Необходимое условие экстремума. Достаточные условия экстремума.
22. Формула Тейлора.

23. Асимптоты графика функции.
24. Исследование поведения функций с помощью производных. Построений графиков
25. Первообразная функции на промежутке. Неопределенный интеграл.
26. Интегрирование по частям. Замена переменной в неопределенном интеграле.
27. Определенный интеграл. Формула Ньютона – Лейбница.
28. Площадь плоской фигуры.
29. Площадь криволинейной трапеции. Длина кривой. Объем тела вращения. Площадь поверхности вращения. Вычисление площади фигуры в полярных координатах.
30. Приближенное вычисление определенных интегралов. Интегральные суммы. Оценка ошибки для формулы прямоугольников.
31. Несобственный интеграл по неограниченному промежутку.
32. Несобственный интеграл от функции с особенностью в конце промежутка интегрирования.
33. Признаки сходимости несобственных интегралов.
34. Числовые ряды. Сходимость ряда. Признаки сходимости знакопостоянных рядов.
35. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость.
36. Равномерная сходимость последовательности функций на промежутке. Непрерывность равномерного предела последовательности непрерывных функций.
37. Степенные ряды. Радиус сходимости. Интервал сходимости. Непрерывность суммы степенного ряда на интервале сходимости. Дифференцирование степенного ряда.
38. Единственность разложения функции в степенной ряд.
39. Ортогональные системы функций на промежутке.
40. Ряды Фурье. Разложение периодической функции в ряд Фурье. Достаточное условие сходимости ряда Фурье функции.

1-й курс, II семестр

1. Пространства R^n. Расстояние. Открытые, замкнутые, связные множества в R^n. Граница множества, его замыкание.
2. Предел функции нескольких переменных.
3. Непрерывность функции многих переменных.
4. Равномерная непрерывность функции.
5. Частные производные. Дифференциал функции нескольких переменных. Достаточное условие дифференцируемости функции нескольких переменных.
6. Геометрический смысл дифференциала. Уравнение плоскости, касательной к графику функции двух переменных.
7. Производная по направлению.
8. Градиент функции, его геометрический смысл.
9. Суперпозиция функции многих переменных. Непрерывность и дифференцируемость суперпозиции.
10. Производные высших порядков. Условие равенства смешанных производных.
11. Элементы комбинаторики: размещения с повторениями и без повторений, сочетания. Бином Ньютона.
12. Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора.
13. Локальный экстремум функции многих переменных. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума.
14. Метод наименьших квадратов.
15. Многомерные отображения. Координатные функции отображения. Дифференцируемые отображения. Матрица Якоби. Якобиан отображения, его геометрический смысл.
16. Функциональная зависимость. Достаточное условие функциональной независимости.
17. Неявные функции. Непрерывность и дифференцируемость функций, заданных неявно.
18. Условный экстремум. Функция Лагранжа.
19. Интегралы, зависящие от параметра. Непрерывность, дифференцируемость интеграла по параметру.
20. Теорема Фубини. Общие принципы вычисления многомерных интегралов. Многомерный интеграл как предел интегральных сумм.

21. Определение двойного интеграла. Геометрический и физический смысл двойного интеграла.
22. Замена переменных в двойном интеграле. Полярные координаты.
23. Тройной интеграл. Его свойства и физический смысл.
24. Замена переменных в тройном интеграле. Цилиндрические и сферические координаты.
25. Криволинейный интеграл первого рода. Его свойства, геометрический и физический смысл.
26. Криволинейный интеграл второго рода. Его свойства и физический смысл.
27. Сведение интеграла второго рода к интегралу первого рода.
28. Формула Грина.
29. Восстановление функции двух переменных по ее частным производным.
30. Векторное поле. Свойства потенциальных векторных полей.
31. Поверхность. Нормаль к поверхности. Двухсторонние поверхности.
32. Площадь поверхности.
33. Поверхностный интеграл первого рода. Его физический смысл.
34. Поверхностный интеграл второго рода. Его физический смысл, сведение к интегралу первого рода.
35. Дивергенция векторного поля, ее физический смысл.
36. Формула Гаусса – Остроградского.
37. Ротор векторного поля. Циркуляция.
38. Формула Стокса.

2-й курс, I семестр

1. Дифференциальное уравнение, общее и частное решения, интегралы — общие и частные. Начальные условия.
2. Поле направлений, изоклины, семейство интегральных кривых.
3. Задача Коши.
4. Классификация простейших дифференциальных уравнений первого порядка. Уравнения с разделяющимися

переменными, однородные уравнения, линейные уравнения, Бернулли, уравнения в полных дифференциалах, интегрирующий множитель.

5. Методы нахождения частного решения: метод вариации произвольных постоянных, специальная правая часть.
6. Уравнения, не разрешенные относительно производной. Метод введения параметра.
7. Понижение порядка простейших дифференциальных уравнений n-го порядка.
8. Системы дифференциальных уравнений первого порядка. Постановка задачи Коши.
9. Дифференциальные уравнения n-го порядка, постановка задачи Коши. Сведение к системе первого порядка.
10. Линейные уравнения n-го порядка: пространство решений.
11. Линейная зависимость и независимость функций.
12. Определитель Вронского, его связь с решениями линейного уравнения n-го порядка.
13. Фундаментальная система решений линейного уравнения n-го порядка.
14. Линейные однородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Построение общего решения в зависимости от набора корней характеристического уравнения.
15. Линейные неоднородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Построение частного решения: метод множителей Лагранжа, квазиполином.
16. Гармонические колебания. Уравнение осциллятора. Резонанс.
17. Системы линейных ОДУ первого порядка. Свойства решений. Пространство решений. Фундаментальная система решений.
18. Линейная зависимость вектор – функций. Определитель Вронского для вектор – функций.
19. Устойчивость решения по Ляпунову, асимптотическая устойчивость.
20. Устойчивость по первому приближению.
21. Функция Ляпунова.
22. Фазовый портрет. Особые точки автономной системы двух линейных дифференциальных уравнений. Линеаризованная

система. Классификация точек покоя в зависимости от собственных чисел.

23. Квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка. Характеристики.
24. Математические модели популяций: изолированный вид в условиях конкуренции, два виду в борьбе за источники существования, хищник – жертва.
25. Волновое уравнение. Постановка начально-краевой задачи. Метод Фурье. Задача Штурма – Лиувилля.
26. Краевые задачи.
27. Решение дифференциальных уравнений с помощью рядов.

Основные утверждения

1-й курс, I семестр

1. Первый замечательный предел.
2. Ограниченность функции, имеющей предел в точке.
3. Теорема о сохранении знака.
4. Предельный переход в неравенствах.
5. Единственность предела.
6. Бесконечно малые величины, их свойства. Сравнение бесконечно малых.
7. Предел суммы, разности, произведения, частного.
8. Теорема о двух милиционерах.
9. Непрерывность суммы, разности, произведения, частного непрерывных функций.
10. Непрерывность многочленов, рациональных дробей, тригонометрических функций.
11. Непрерывность суперпозиции непрерывных функций.
12. Классификация точек разрыва.
13. Теорема о предельном переходе по последовательности значений аргумента.
14. Свойства функций, непрерывных на отрезке: теорема Больцано – Коши, теоремы Вейерштрасса.

15. Существование и непрерывность обратной функции.
16. Теорема Кантора о равномерной непрерывности.
17. Производная функции в точке. Ее геометрический смысл. Уравнение касательной к графику функции.
18. Производные основных элементарных функций.
19. Производная суммы, разности, произведения, частного.
20. Производная обратной функции, суперпозиции функций.
21. Производная функции, заданной параметрически.
22. Необходимое условие существования локального экстремума (теорема Ферма).
23. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши.
24. Достаточное условие возрастания (убывания) дифференцируемой функции.
25. Достаточные условия существования локального экстремума.
26. Формула Тейлора.
27. Достаточное условие выпуклости функции на промежутке.
28. Правила Лопиталя.
29. Описание множества всех первообразных заданной функции на промежутке.
30. Интегрирование по частям. Замена переменной в неопределенном интеграле.
31. Определенный интеграл и его свойства. Теоремы о среднем.
32. Интегрирование по частям и замена переменной в определенном интеграле.
33. Принципы применения определенного интеграла.
34. Вычисление площади криволинейной трапеции.
35. Вычисление длины кривой.
36. Объем тела вращения.
37. Площадь поверхности вращения. Вычисление площади фигуры в полярных координатах.
38. Интеграл как предел интегральных сумм.
39. Формула прямоугольников. Теорема об оценке погрешности в формуле прямоугольников.
40. Теорема Гюльдена.
41. Признак сравнения для сходимости несобственных интегралов для знакопостоянных функций.
42. Несобственные интегралы для знакопеременных функций. Условная сходимость.

43. Числовые ряды. Необходимое условие сходимости ряда.
44. Признаки сходимости знакопостоянных рядов: сравнения, Даламбера, Коши, интегральный признак Коши.
45. Знакопеременные ряды. Абсолютная сходимость. Признак Лейбница.
46. Теорема о непрерывности равномерного предела последовательности непрерывных функций.
47. Предельный переход под знаком интеграла.
48. Теорема о непрерывности суммы степенного ряда на интервале сходимости.
49. Вычисление производной суммы степенного ряда.
50. Единственность разложения функции в степенной ряд.
51. Свойства тригонометрической системы функций.
52. Ряды Фурье. Разложение периодической функции в ряд Фурье.
53. Достаточное условие сходимости ряда Фурье функции.

1-й курс, II семестр

1. Неравенство треугольника в R^n.
2. Свойства предела функции нескольких переменных.
3. Непрерывность суммы, разности, произведения, частного, суперпозиции функции многих переменных.
4. Теорема Больцано – Коши.
5. Достаточные условия непрерывности функции нескольких переменных.
6. Достаточное условие дифференцируемости функции нескольких переменных.
7. Геометрический смысл дифференциала. Уравнение плоскости, касательной к графику функции двух переменных.
8. Градиент функции, его геометрический смысл.
9. Производная по направлению. Ее выражение через градиент функции.
10. Суперпозиция функции многих переменных. Непрерывность и дифференцируемость суперпозиции.
11. Теорема о равенстве смешанных производных.
12. Бином Ньютона.

13. Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора.
14. Локальный экстремум функции многих переменных. Необходимое условие экстремума.
15. Достаточное условие экстремума в терминах частных производных второго порядка.
16. Метод наименьших квадратов. Восстановление параметров линейной функции.
17. Матрица Якоби. Якобиан отображения, его геометрический смысл.
18. Функциональная зависимость. Достаточное условие функциональной независимости.
19. Неявные функции. Непрерывность и дифференцируемость функций, заданных неявно.
20. Условный экстремум. Функция Лагранжа.
21. Интегралы, зависящие от параметра. Непрерывность, дифференцируемость интеграла по параметру.
22. Теорема Фубини.
23. Общие принципы вычисления многомерных интегралов. Многомерный интеграл как предел интегральных сумм.
24. Определение двойного интеграла. Геометрический и физический смысл двойного интеграла.
25. Замена переменных в двойном интеграле. Полярные координаты.
26. Тройной интеграл и его свойства.
27. Замена переменных в тройном интеграле.
28. Цилиндрические и сферические координаты. Якобиан преобразований.
29. Криволинейный интеграл первого рода. Интегральные суммы. Свойства, геометрический и физический смысл интеграла первого рода.
30. Криволинейный интеграл второго рода. Его свойства и физический смысл.
31. Сведение интеграла второго рода к интегралу первого рода.
32. Формула Грина.
33. Вычисление площади плоской фигуры с помощью формулы Грина.
34. Восстановление функции двух переменных по ее частным производным.

35. Векторное поле. Свойства потенциальных векторных полей.
36. Вычисление площади поверхности.
37. Свойства поверхностного интеграла первого рода.
38. Поверхностный интеграл второго рода. Его физический смысл, сведение к интегралу первого рода.
39. Формула Гаусса – Остроградского.
40. Формула Стокса.

2-й курс, I семестр

1. Интегрирование простейших дифференциальных уравнений первого порядка.
2. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.
3. Интегрирование уравнений, не разрешенных относительно производной: метод введения параметра.
4. Методы понижения порядка обыкновенных дифференциальных уравнений.
5. Свойства решений линейных уравнений n-го порядка.
6. Определение линейной независимости системы функций.
7. Свойства определителя Вронского. Связь с решениями дифференциального уравнения.
8. Структура общего решения однородного линейного уравнения n-го порядка.
9. Структура общего решения неоднородного линейного уравнения n-го порядка.
10. Метод множителей Лагранжа для интегрирования неоднородных линейных уравнений.
11. Построение частного решения линейного неоднородного уравнения n-го порядка со специальной правой частью.
12. Формула Остроградского – Лиувилля.
13. Построение фундаментальной системы решений для линейного уравнения с постоянными коэффициентами. Пространство решений.
14. Различные режимы гармонических колебаний в зависимости от соотношения исходных параметров задачи. Собственные и вынужденные колебания. Затухающие колебания. Резонанс.

15. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка: свойства, пространство решений и его размерность, фундаментальная система решений.
16. Общее решение системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка.
17. Методы построения общего решения систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами.
18. Исследование устойчивости решения системы дифференциальных уравнений с помощью функции Ляпунова.
19. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению.
20. Классификация особых точек автономной системы линейных дифференциальных уравнений на плоскости.
21. Построение общего решения квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка. Постановка и решение задачи Коши.
22. Метод Фурье разделения переменных для волнового уравнения.

5. Образовательные технологии

Формы контроля

- Экзамены — три, в конце каждого семестра, проводит лектор и преподаватели, ведущие практические занятия.
- Зачеты — два , в конце каждого семестра 1 курса, проводят преподаватели, ведущие практические занятия.
- Контрольные работы— 6 – 9, от двух до трех в каждом семестре, проводят преподаватели, ведущие практические занятия.
- Коллоквиумы — 2 – 3, проводит лектор и преподаватели, ведущие практические занятия.
- Опрос студентов, демонстрационное решение задач, проверка выполнения домашних заданий, самостоятельные работы — в течение трех семестров.

6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости

1. Текущий контроль: заключается в проверке выполнения домашних заданий на практических занятиях (семинарах).
2. Промежуточный контроль: в середине каждого семестра предусмотрен коллоквиум по пройденному материалу. Теоретические вопросы к коллоквиуму приведены выше. Он может проводиться как в устной, так и в письменной форме по усмотрению преподавателя. Оценка за коллоквиум может учитываться при выставлении итоговой оценки на экзамене.
3. В каждом из семестров предусмотрены семестровые домашние задания, выполнение которых является необходимым для получения зачета и допуска к итоговому экзамену.
4. Итоговый контроль усвоения материала курса за семестр осуществляется на экзамене, который проводится в устной форме. Образцы экзаменационных билетов приведены выше. Билет содержит два теоретических вопроса, как правило, из различных разделов семестрового курса. Кроме того, каждому студенту дается задача, дополняющая материал билета. Для получения отличной оценки необходимо ответить на вопросы билета с исчерпывающей полнотой: дать точные формулировки необходимых математических определений и утверждений, включая их доказательства, если они приводились в курсе лекций; решить прилагаемую к билету задачу. Для получения оценки «хорошо» достаточно уметь безошибочно сформулировать основные утверждения , требуемые в билете, и изложить схему их доказательства, а также решить дополнительную задачу или хотя бы объяснить метод ее решения. Для получения удовлетворительной оценки необходимо правильно формулировать основные математические утверждения

Перечень коллоквиумов

Примерные контрольные вопросы и задания для самостоятельной работы (в объеме часов, предусмотренных образовательным стандартом и рабочим учебным планом данной дисциплины).

Коллоквиум 1 курс, I семестр

Дифференциальное исчисление функции одной переменной.

1. Множества. Операции над множествами. Свойства операций.
2. Предел функции в точке. Первый замечательный предел.
3. Теорема о сохранении знака. Предельный переход в неравенствах. Единственность предела.
4. Теорема о двух милиционерах.
5. Понятие бесконечно малой. Свойства бесконечно малых.
6. Предел суммы, произведения, частного.
7. Предел функции при $x \to \infty$; бесконечные пределы.
8. Сравнение бесконечно малых.
9. Непрерывность функции в точке. Предельный переход по последовательности значений аргумента.
10. Непрерывность суммы, произведения, частного, суперпозиции непрерывных функций.
11. Свойства функций, непрерывных на отрезке. Теорема Больцано-Коши. Теоремы Вейерштрасса (без доказательства).
12. Непрерывность обратной функции.
13. Непрерывность основных элементарных функций.
14. Определение равномерной непрерывности. Теорема Кантора (без доказательства). Примеры.
15. Производная функции в точке. Геометрический смысл производной. Непрерывность дифференцируемой функции.
16. Производная суммы, произведения, частного.
17. Производная обратной функции; суперпозиции функций.
18. Вычисление производных основных элементарных функций.
19. Дифференциал функции. Применение в приближенных вычислениях. Производные и дифференциалы высших порядков.
20. Локальные экстремумы функции. Теоремы Ферма и Ролля.
21. Теоремы Коши и Лагранжа. Следствия.

22. Формула Тейлора. Применение в приближенных вычислениях.
23. Определение промежутков возрастания и убывания дифференцируемой функции.
24. Достаточные условия локального экстремума дифференцируемой функции.
25. Выпуклость. Связь со второй производной. Точки перегиба.
26. Правила Лопиталя.
27. Асимптоты графика функции.

Коллоквиум 1 курс, II семестр

Дифференциальное исчисление функций многих переменных

1. Неравенство треугольника в R^n.
2. Свойства предела функции нескольких переменных.
3. Непрерывность суммы, разности, произведения, частного, суперпозиции функции многих переменных.
4. Теорема Больцано – Коши.
5. Достаточные условия непрерывности функции нескольких переменных.
6. Достаточное условие дифференцируемости функции нескольких переменных.
7. Геометрический смысл дифференциала. Уравнение плоскости, касательной к графику функции двух переменных.
8. Градиент функции, его геометрический смысл.
9. Производная по направлению. Ее выражение через градиент функции.
10. Суперпозиция функции многих переменных. Непрерывность и дифференцируемость суперпозиции.
11. Теорема о равенстве смешанных производных.
12. Бином Ньютона.
13. Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора.
14. Локальный экстремум функции многих переменных. Необходимое условие экстремума.
15. Достаточное условие экстремума в терминах частных производных второго порядка.
16. Метод наименьших квадратов. Восстановление параметров линейной функции.

17. Матрица Якоби. Якобиан отображения, его геометрический смысл.
18. Функциональная зависимость. Достаточное условие функциональной независимости.
19. Неявные функции. Непрерывность и дифференцируемость функций, заданных неявно.
20. Условный экстремум. Функция Лагранжа.

Коллоквиум 2 курс, I семестр

Методы решения дифференциальных уравнений

1. Интегрирование простейших дифференциальных уравнений первого порядка.
2. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.
3. Интегрирование уравнений, не разрешенных относительно производной: метод введения параметра.
4. Методы понижения порядка обыкновенных дифференциальных уравнений.
5. Свойства решений линейных уравнений n-го порядка.
6. Определение линейной независимости системы функций.
7. Свойства определителя Вронского. Связь с решениями дифференциального уравнения.
8. Структура общего решения однородного линейного уравнения n-го порядка.
9. Структура общего решения неоднородного линейного уравнения n-го порядка.
10. Метод множителей Лагранжа для интегрирования неоднородных линейных уравнений.
11. Построение частного решения линейного неоднородного уравнения n-го порядка со специальной правой частью.
12. Формула Остроградского – Лиувилля.
13. Построение фундаментальной системы решений для линейного уравнения с постоянными коэффициентами. Пространство решений.

14. Различные режимы гармонических колебания в зависимости от соотношения исходных параметров задачи. Собственные и вынужденные колебания. Затухающие колебания. Резонанс.
15. Системы обыкновенных дифференциальный уравнений первого порядка: свойства, пространство решений и его размерность, фундаментальная система решений.
16. Общее решение системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка.
17. Методы построения общего решения систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами.

Образцы билетов для подготовки к экзамену

1 курс, I семестр

БИЛЕТ 1

1. Понятие бесконечно малой. Свойства бесконечно малых.
2. Несобственный интеграл по неограниченному промежутку. Признаки сходимости.

БИЛЕТ 2

1. Предел функции в точке. Теорема о сохранении знака. Единственность предела. Предельный переход в неравенстве. Односторонние пределы.
2. Понятие площади фигуры. Вычисление площадей с помощью интегрирования. Использование полярных координат.

БИЛЕТ 3

1. Предел суммы, произведения, частного.
2. Знакопеременные ряды. Абсолютная сходимость. Признак Лейбница.

БИЛЕТ 4

1. Предел функции при $x \to \infty$; бесконечные пределы. Асимптоты графика функции.
2. Числовые ряды. Необходимое условие сходимости. Признак сравнения сходимости знакопостоянных рядов; интегральный признак.

БИЛЕТ 5

1. Сравнение бесконечно малых. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$.
2. Несобственный интеграл для функции с особенностью в одном из концов ограниченного промежутка интегрирования. Признаки сходимости.

БИЛЕТ 6

1. Непрерывность функции в точке. Предельный переход по последовательности значений аргумента. Непрерывность функций $\sin x$, $\cos x$. Точки разрыва и их классификация.
2. Интеграл как предел интегральных сумм. Приближенное вычисление интеграла. Оценка ошибки в формуле прямоугольников.

БИЛЕТ 7

1. Непрерывность суммы, произведения, частного, суперпозиции непрерывных функций. Непрерывность многочленов, рациональных дробей, функции $\operatorname{tg} x$.
2. Вычисление длины кривой, площади поверхности вращения, объема тела вращения с помощью интегрирования.

БИЛЕТ 8

1. Свойства функций, непрерывных на отрезке. Теорема Больцано-Коши. Теоремы Вейерштрасса (без доказательства).
2. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле. Теорема о среднем.

БИЛЕТ 9

1. Определение обратной функции. Непрерывность обратной функции.
2. Признак сравнения сходимости знакопостоянных рядов; интегральный признак.

БИЛЕТ 10

1. Правила Лопиталя. Примеры.
2. Степенные ряды. Радиус сходимости. Равномерная сходимость последовательности частичных сумм. Непрерывность суммы степенного ряда.

БИЛЕТ 11

1. Понятие локального экстремума. Теоремы Ферма и Ролля.
2. Несобственный интеграл по неограниченному промежутку. Признаки сходимости.

БИЛЕТ 12

1. Определение равномерной непрерывности. Теорема Кантора (без доказательства). Примеры.
2. Интегрирование и дифференцирование суммы степенного ряда. Примеры. Единственность разложения функции в степенной ряд.

БИЛЕТ 13

1. Производная функции в точке. Геометрический смысл производной. Уравнение касательной к графику функции. Непрерывность дифференцируемой функции.

2. Интеграл как предел интегральных сумм. Приближенное вычисление интеграла. Оценка ошибки в формуле прямоугольников.

БИЛЕТ 14

1. Производная суммы, произведения, частного. Вычисление производных функций x^n, $\sin x, \cos x,$ $\mathrm{tg}\ x$.
2. Свойства системы тригонометрических функций на отрезке $[-\pi, \pi]$. Разложение функции в ряд Фурье. Достаточные условия сходимости ряда Фурье к значению функции в точке. Примеры.

БИЛЕТ 15

1. Производная обратной функции; суперпозиции функций. Вычисление производных функций $\arcsin x, \arccos x,$.
$\mathrm{arctg}\, x,$ $\ln,$ e^x.
2. Знакопеременные ряды. Абсолютная сходимость. Признак Лейбница.

БИЛЕТ 16

1. Дифференциал функции. Применение в приближенных вычислениях. Производные и дифференциалы высших порядков.
2. Степенные ряды. Радиус сходимости. Равномерная сходимость последовательности частичных сумм. Непрерывность суммы степенного ряда.

БИЛЕТ 17

1. Формула Тейлора. Применение в приближенных вычислениях.

2. Поточечная и равномерная сходимости последовательности функций, заданных на промежутке. Предельный переход под знаком интеграла. Примеры.

БИЛЕТ 18

1. Теоремы Коши и Лагранжа. Следствия.
2. Непрерывность предела равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций на промежутке. Примеры.

БИЛЕТ 19

1. Правила Лопиталя. Примеры.
2. Числовые ряды. Необходимое условие сходимости. Признаки Даламбера и Коши сходимости знакопостоянных рядов.

БИЛЕТ 20

1. Формула Тейлора. Применение в приближенных вычислениях.
2. Вычисление длины кривой, площади поверхности вращения, объема тела вращения с помощью интегрирования.

БИЛЕТ 21

1. Определение промежутков возрастания и убывания дифференцируемой функции. Достаточные условия экстремума.
2. Свойства системы тригонометрических функций на отрезке $[-\pi, \pi]$. Разложение функции в ряд Фурье. Достаточные условия сходимости ряда Фурье к значению функции в точке. Примеры.

БИЛЕТ 22

1. Выпуклость функции на промежутке. Связь со второй производной. Точки перегиба.
2. Знакопеременные ряды. Абсолютная сходимость. Признак Лейбница.

БИЛЕТ 23

1. Первообразная. Описание множества всех первообразных на промежутке. Неопределенный интеграл, его основные свойства.
2. Непрерывность предела равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций на промежутке. Примеры.

БИЛЕТ 24

1. Формула Тейлора. Применение в приближенных вычислениях.
2. Несобственный интеграл по неограниченному промежутку. Признаки сходимости.

БИЛЕТ 25

1. Определенный интеграл. Его основные свойства. Принцип применения.
2. Свойства функций, непрерывных на отрезке. Теорема Больцано – Коши. Теоремы Вейерштрасса (без доказательства).

БИЛЕТ 26

1. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле. Теорема о среднем.

2. Предел функции в точке. Теорема о сохранении знака. Единственность предела. Предельный переход в неравенстве. Односторонние пределы.

БИЛЕТ 27

1. Понятие площади фигуры. Вычисление площадей с помощью интегрирования. Использование полярных координат.
2. Интегрирование и дифференцирование суммы степенного ряда. Примеры. Единственность разложения функции в степенной ряд.

БИЛЕТ 28

1. Теоремы Коши и Лагранжа. Следствия.
2. Несобственный интеграл по неограниченному промежутку. Признаки сходимости.

БИЛЕТ 29

1. Определение обратной функции. Непрерывность обратной функции.
2. Поточечная и равномерная сходимости последовательности функций, заданных на промежутке. Предельный переход под знаком интеграла. Примеры.

БИЛЕТ 30

1. Понятие локального экстремума. Теоремы Ферма и Ролля.
2. Интеграл как предел интегральных сумм. Приближенное вычисление интеграла. Оценка ошибки в формуле прямоугольников.

1 курс, II семестр

БИЛЕТ 1

1. Функции многих переменных: частные производные, дифференциал. Достаточные условия непрерывности, дифференцируемости. Уравнение плоскости, касательной к поверхности (графику функции двух переменных в R^3).
2. Криволинейный интеграл первого рода. Его свойства, геометрический и физический смысл.

БИЛЕТ 2

1. Производная по направлению. Градиент функции, его геометрический смысл.
2. Формула Грина. Вычисление площади области, ограниченной замкнутым контуром на плоскости.

БИЛЕТ 3

1. Суперпозиция функций многих переменных. Непрерывность, дифференцирование суперпозиции.
2. Поверхностный интеграл первого рода, его свойства и физический смысл.

БИЛЕТ 4

1. Частные производные высших порядков. Теорема о равенстве смешанных производных.
2. Замена переменных в двойном интеграле.

БИЛЕТ 5

1. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора для функций многих переменных.
2. Определение двойного интеграла, его свойства. Приложения в геометрии и физике.

БИЛЕТ 6

1. Многомерные отображения: дифференциал, матрица Якоби. Якобиан отображения, его геометрический смысл.
2. Формула Стокса.

БИЛЕТ 7

1. Функциональная зависимость. Достаточное условие независимости функций.
2. Формула Остроградского.

БИЛЕТ 8

1. Функции, заданные неявно. Достаточное условие существования и непрерывности.
2. Определение поверхностного интеграла второго рода. Его физический смысл. Сведение к интегралу первого рода.

БИЛЕТ 9

1. Локальные экстремумы функций многих переменных. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие.
2. Поверхностный интеграл первого рода, его свойства и физический смысл.

БИЛЕТ 10

1. Метод наименьших квадратов. Обоснование существования и единственности решения в простейшем случае восстановления параметров, определяющих линейную функцию.
2. Определение поверхностного интеграла второго рода. Его физический смысл. Сведение к интегралу первого рода.

БИЛЕТ 11

1. Частные производные высших порядков. Теорема о равенстве смешанных производных.
2. Криволинейный интеграл первого рода. Его свойства, геометрический и физический смысл.

БИЛЕТ 12

1. Условный экстремум. Метод Лагранжа.
2. Определение двойного интеграла, его свойства. Приложения в геометрии и физике.

БИЛЕТ 13

1. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора для функций многих переменных.
2. Формула Грина. Вычисление площади области, ограниченной замкнутым контуром на плоскости.

БИЛЕТ 14

1. Теорема о дифференцируемости функции, заданной неявно.

2. Многомерные интегралы, их общие свойства. Следствия: теорема о среднем, вычисление с помощью перехода к пределу по последовательности интегральных сумм.

БИЛЕТ 15

1. Локальные экстремумы функций многих переменных. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие.
2. Поверхность. Нормаль к поверхности. Двусторонние поверхности. Определение площади поверхности.

БИЛЕТ 16

1. Функциональная зависимость. Достаточное условие независимости функций.
2. Определение тройного интеграла, его свойства. Физический смысл. Замена переменных в тройном интеграле. Примеры (переход к цилиндрическим, сферическим координатам).

БИЛЕТ 17

1. Метод наименьших квадратов. Обоснование существования и единственности решения в простейшем случае восстановления параметров, определяющих линейную функцию.
2. Криволинейный интеграл второго рода, его основные свойства. Сведение к интегралу первого рода. Физический смысл интеграла второго рода.

БИЛЕТ 18

1. Многомерные отображения: дифференциал, матрица Якоби. Якобиан отображения, его геометрический смысл.

2. Формула Грина. Вычисление площади области, ограниченной замкнутым контуром на плоскости.

БИЛЕТ 19

1. Суперпозиция функций многих переменных. Непрерывность, дифференцирование суперпозиции.
2. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования. Восстановление функции по ее частным производным.

БИЛЕТ 20

1. Непрерывность и дифференцируемость интегралов, зависящих от параметра (случай переменных пределов интегрирования).
2. Формула Остроградского.

БИЛЕТ 21

1. Условный экстремум. Метод Лагранжа.
2. Криволинейный интеграл второго рода, его основные свойства. Сведение к интегралу первого рода. Физический смысл интеграла второго рода.

БИЛЕТ 22

1. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора для функций многих переменных.
2. Замена переменных в двойном интеграле.

БИЛЕТ 23

1. Производная по направлению. Градиент функции, его геометрический смысл.
2. Формула Стокса.

БИЛЕТ 24

1. Интегралы, зависящие от параметра (случай постоянных пределов интегрирования). Непрерывность по параметру, дифференцируемость. Теорема Фубини.
2. Поверхность. Нормаль к поверхности. Двусторонние поверхности. Определение площади поверхности.

БИЛЕТ 25

1. Функции многих переменных: частные производные, дифференциал. Достаточные условия непрерывности, дифференцируемости. Уравнение плоскости, касательной к поверхности (графику функции двух переменных в R^3).
2. Формула Остроградского.

БИЛЕТ 26

1. Локальные экстремумы функций многих переменных. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие.
2. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования. Восстановление функции по ее частным производным.

БИЛЕТ 27

1. Условный экстремум. Метод Лагранжа.

2. Определение тройного интеграла, его свойства. Физический смысл. Замена переменных в тройном интеграле. Примеры (переход к цилиндрическим, сферическим координатам).

БИЛЕТ 28

1. Частные производные высших порядков. Теорема о равенстве смешанных производных.
2. Многомерные интегралы, их общие свойства. Следствия: теорема о среднем, вычисление с помощью перехода к пределу по последовательности интегральных сумм.

БИЛЕТ 29

1. Непрерывность и дифференцируемость интегралов, зависящих от параметра (случай переменных пределов интегрирования).
2. Элементы комбинаторики: размещения, перестановки, сочетания. Бином Ньютона. Примеры применения в решении задач.

БИЛЕТ 30

1. Функции, заданные неявно. Достаточное условие существования и непрерывности.
2. Криволинейный интеграл второго рода, его основные свойства. Сведение к интегралу первого рода. Физический смысл интеграла второго рода.

2 курс, I семестр

БИЛЕТ 1

1. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка. Свойства решений однородного уравнения. Определитель Вронского. Существование фундаментальной системы решений. Общее решение.
2. Дифференциальные уравнения химической кинетики. Законы сохранения.

БИЛЕТ 2

1. Применение дифференциальных уравнений для моделирования биологических процессов: развитие двух видов, конкурирующих в борьбе за пищу.
2. Дифференциальные уравнения свободных колебаний. Вынужденные колебания. Резонанс.

БИЛЕТ 3

1. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения n-го порядка. Общее решение. Метод вариации постоянных. Построение частного решения для уравнений с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.
2. Применение дифференциальных уравнений для моделирования биологических процессов: развитие двух видов, конкурирующих в борьбе за пищу.

БИЛЕТ 4

1. Применение дифференциальных уравнений для моделирования биологических процессов: развитие изолированной популяции в условиях конкуренции.

2. Неоднородные линейные системы дифференциальных уравнений. Общее решение. Метод вариации постоянных.

БИЛЕТ 5

1. Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши. Теорема существования и единственности. Непрерывная зависимость решения от начальных данных. Метод последовательных приближений.
2. Однородные линейные системы дифференциальных уравнений. Общие свойства решений. Определитель Вронского. Построение фундаментальной системы решений. Общее решение.

БИЛЕТ 6

1. Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения.
2. Понятие устойчивости по Ляпунову. Устойчивость по первому приближению точки покоя автономной системы. Критерий Гурвица. Функция Ляпунова. Достаточное условие устойчивости стационарного решения автономной системы (теорема Ляпунова).

БИЛЕТ 7

1. Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши. Теорема существования и единственности. Непрерывная зависимость решения от начальных данных. Метод последовательных приближений.
2. Автономные системы. Точки покоя. Классификация точек покоя линейной однородной системы второго порядка с постоянными коэффициентами.

БИЛЕТ 8

1. Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения.
2. Волновое уравнение. Метод разделения переменных.

БИЛЕТ 9

1. Уравнения в полных дифференциалах.
2. Автономные системы. Точки покоя. Классификация точек покоя линейной однородной системы второго порядка с постоянными коэффициентами.

БИЛЕТ 10

1. Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами. Построение фундаментальной системы решений (случай действительных различных корней).
2. Волновое уравнение. Метод разделения переменных.

БИЛЕТ 11

1. Системы дифференциальных уравнений. Задача Коши. Теорема существования и единственности.
2. Понятие устойчивости по Ляпунову. Устойчивость по первому приближению точки покоя автономной системы. Критерий Гурвица. Функция Ляпунова. Достаточное условие устойчивости стационарного решения автономной системы (теорема Ляпунова).

БИЛЕТ 12

1. Линейные однородные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Построение фундаментальной системы решений.

2. Волновое уравнение. Метод разделения переменных.

БИЛЕТ 13

1. Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами. Построение фундаментальной системы решений (случай, когда есть комплексные корни, кратные корни).
2. Применение дифференциальных уравнений для моделирования биологических процессов: популяция "хищник-жертва".

БИЛЕТ 14

1. Автономные системы. Точки покоя. Классификация точек покоя линейной однородной системы второго порядка с постоянными коэффициентами.
2. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка: решение с помощью рядов, краевые задачи.

БИЛЕТ 15

1. Линейные однородные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Построение фундаментальной системы решений.
2. Понятие устойчивости по Ляпунову. Устойчивость по первому приближению точки покоя автономной системы. Критерий Гурвица. Функция Ляпунова. Достаточное условие устойчивости стационарного решения автономной системы (теорема Ляпунова).

БИЛЕТ 16

1. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения n-го порядка. Общее решение. Метод вариации постоянных.

Построение частного решения для уравнений с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.
2. Применение дифференциальных уравнений для моделирования биологических процессов: популяция "хищник-жертва".

БИЛЕТ 17

1. Применение дифференциальных уравнений для моделирования биологических процессов: развитие изолированной популяции в условиях конкуренции.
2. Понятие устойчивости по Ляпунову. Устойчивость по первому приближению точки покоя автономной системы. Критерий Гурвица. Функция Ляпунова. Достаточное условие устойчивости стационарного решения автономной системы (теорема Ляпунова).

БИЛЕТ 18

1. Уравнения в полных дифференциалах.
2. Понятие устойчивости по Ляпунову. Устойчивость по первому приближению точки покоя автономной системы. Критерий Гурвица. Функция Ляпунова. Достаточное условие устойчивости стационарного решения автономной системы (теорема Ляпунова).

БИЛЕТ 19

1. Системы дифференциальных уравнений. Задача Коши. Теорема существования и единственности.
2. Применение дифференциальных уравнений для моделирования биологических процессов: популяция "хищник-жертва".

БИЛЕТ 20

1. Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами. Построение фундаментальной системы решений (случай действительных различных корней).
2. Волновое уравнение. Метод разделения переменных.

БИЛЕТ 21

1. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка. Свойства решений однородного уравнения. Определитель Вронского. Существование фундаментальной системы решений. Общее решение.
2. Уравнения с частными производными первого порядка. Построение общего решения. Задача Коши.

БИЛЕТ 22

1. Применение дифференциальных уравнений для моделирования биологических процессов: популяция "хищник-жертва".
2. Однородные линейные системы дифференциальных уравнений. Общие свойства решений. Определитель Вронского. Построение фундаментальной системы решений. Общее решение.

БИЛЕТ 23

1. Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами. Построение фундаментальной системы решений (случай, когда есть комплексные корни, кратные корни).
2. Применение дифференциальных уравнений для моделирования биологических процессов: развитие двух видов, конкурирующих в борьбе за пищу.

БИЛЕТ 24

1. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Метод вариации постоянной.
2. Уравнения с частными производными первого порядка. Построение общего решения. Задача Коши.

БИЛЕТ 25

1. Применение дифференциальных уравнений для моделирования биологических процессов: популяция "хищник-жертва".
2. Однородные линейные системы дифференциальных уравнений. Общие свойства решений. Определитель Вронского. Построение фундаментальной системы решений. Общее решение.

Примеры контрольных работ

1-й курс, I семестр

Контрольная работа № 1.

1. Решить уравнение $||x+1|+2|=2$.
2. Найти область определения функций: а) $y=\sqrt{x-1}+\ln(2x-5)$, б) $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{2-x}$, в) $y=3^{1/x}$.
3. Выяснить четность (нечетность) функций: а) $y=\cos x+x\sin x$, б) $y=2^x+2^{-x^2}$, в) $y=x^3+2x+1$, г) $y=\ln\sin x$.
4. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x-5}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$,

в) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x}-x)$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{2n}$.

Контрольная работа № 2.

1. Найти производные функций:

а) $y=7x^7+3x^2-4x+1$, б) $y=\dfrac{2x+1}{3x-1}$, в) $y=\sqrt{x^2+2x}$,

г) $y=\sin(x+1)$, д) $y=(x^2+1)tg\,x$, е) $y=5^{x^2-1}$,

ж) $y=\ln(2x-1)$, з) $y=x^{1/x}$.

2. Вычислить а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$, б) $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^x$.

3. Дана функция $f(x) = x - \sin x$ а) Разложить $f(x)$ в ряд Маклорена до члена с x^3 включительно. б) Найти $df, d^2 f$.

4. Найти асимптоты графика функции $f(x) = 1 + \sqrt[3]{(x-1)^2}$.

Контрольная работа № 3.

1. Вычислить интегралы:

$$\int (x^2 + 3x^3 + x + 1)dx, \quad \int \frac{x^2+2}{x^2-1}dx,$$

$$\int \frac{x-4}{(x-2)(x-3)}dx, \quad \int (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x})dx, \quad \int \ln^2 x\, dx.$$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}, y = 2 - x, y = 0.$

3. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$, $y = 0$, $x = 0 \quad (x \geq 0)$.

4. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5n+6}{100n-1}$.

5. Исследовать абсолютную и условную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{2n-1}$.

6. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} x^n$.

1 курс, II семестр

Контрольная работа № 1.

1. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin xy}{xy}$.

2. Дана функция $f(x,y)=\ln(x^2+y^3)$ Найти: а) Градиент функции. б) df. в) Частные производные второго порядка. Г) $d^2 f$.

3. Найти экстремумы функции $z=(y-x)^2+(y+2)^2$.

Контрольная работа № 2

1. Вычислить $\iint\limits_G xy^2\,dxdy,$ область G ограничена линиями $x=p, y^2=2px.$

2. Переходя к полярным координатам, вычислить $\iint\limits_G (x^2+y^2)dxdy,$ где G - половина круга радиуса R с центром в начале координат, лежащая в области $y\geq 0.$

3. Вычислить $\int\limits_{AB} y\,dt$ вдоль параболы $y^2=2x$ от точки (0,0) до точки (2,2).

4. С помощью формулы Грина вычислить криволинейный интеграл $\oint\limits_L (x-y)dx+(x+y)dy,$ где $L-$окружность $x^2+y^2=R^2$.

5. Вычислить поверхностный интеграл первого рода $\int\limits_S x(y+z)\,dS,$ где $S-$ часть цилиндрической поверхности $x=\sqrt{1-y^2}$, лежащая между плоскостями $z=0, z=1.$

6. Используя формулу Остроградского, вычислить $\iint\limits_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy,$

где $S-$внешняя сторона пирамиды, ограниченной плоскостями $x+y+z=1, x=0, y=0, z=0.$

2 курс, I семестр

Контрольная работа № 1.

1. $y'+2y = ye^{y}$.
2. $3(1-xy^2)xdx + y(\cos y - 2x^3)dy = 0$.
3. $y(y')^3 + x = 1.$
4. $(y+2)dx - (2x+y-4)dy = 0.$
5. $xy''' = y'' - xy''.$

Контрольная работа № 2.

1. $y''+2y'+2y = x\ e^{-x}, \ \ y(0) = y'(0) = 0$.

2. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z, \\ \dot{y} = 3x - 2y - 3z, \\ \dot{z} = 2z - x + y, \end{cases}$

$\lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = 0.$

3. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 2x - y + 15e^{t}\sqrt{t} \end{cases}$

Контрольная работа № 3

1. Найти положения равновесия системы и исследовать их на устойчивость: $\begin{cases} \dot{x} = e^{y} - e^{x}, \\ \dot{y} = \sqrt{3x + y^{2}} - 2. \end{cases}$

2. Исследовать устойчивость решения задачи Коши

$$\begin{cases} 2t\dot{x} = x - x^{3}, \\ x(1) = 0. \end{cases}$$

3. Решить задачу Коши

$$(x - z)\frac{\partial z}{\partial x} + (y - z)\frac{\partial z}{\partial y} = 2z,$$

$$x - y = 2, z + 2x = 1.$$

Примеры задач по курсу

1 курс I семестр

1. Вычислить
$$\lim_{x\to 0}\frac{(a+x)^x-a^x}{x^2}\quad (a>0).$$
2. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-x^x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$.
3. Определить, при каких значениях постоянных a и b функция $1-\cos 2x-(ax+b)\ln(1+x)$
   является бесконечно малой порядка x^3 при $x\to 0$?
4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=|x^2-7x+10|$ на отрезке $[-2,6]$.
5. Определить, при каких значениях постоянных a и b функция $f(x)=a\ln x+bx^2+x$ имеет экстремумы в точках $x_1=1,\ x_2=2$.
6. Переходя к полярным координатам, вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $(x^2+y^2)^3=4xy(x^2-y^2)$.
7. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y=-x^2+2ax+1$ и осью x. При каком значении параметра a эта площадь будет минимальной?
8. Найти длину линии $y=\frac{x^2}{4}-\frac{\ln x}{2}\quad (x\in[1,3])$.
9. Определить, в каком отношении парабола $y=\frac{x^2}{2}$ делит площадь круга $x^2+y^2=8$.

10. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx.$

11. Определить, для каких значений $p > 0$ сходится интеграл

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{2+\cos x}{1+x^p+x^{2p}} dx.$$

12. Определить, сходится ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{2}{n}\right).$

13. Найти радиус сходимости R ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} \sin\frac{1}{n}.$ Сходится ли ряд при $x = \pm R$?

14. Вычислить для каждого $x \in [0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} (1+nx)e^{-nx}.$$

Сходится ли последовательность функций $f_n(x) = (1+nx)e^{-nx}$ равномерно на $[0,1]$?

1 курс II семестр

1. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, если он существует.
2. Является ли дифференцируемой в точке (0,0) функция $f(x,y) = (x^2 y^2)^{1/3}$? Ответ обосновать.
3. Является ли дифференцируемой в точке (0,0) функция

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

4. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 - 3xy.$

5. Исследовать на экстремум функцию $z = 8/x + x/y + y$.
6. Вычислить производную функции $f(x,y) = y^2/x$ в точках эллипса $2x^2 + y^2 = c^2$ по направлению его внешней нормали.
7. Доказать, что
   а) $div(rot F) = 0$,
   б) $rot(grad \Phi) = 0$.
8. На поверхности $x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$ найдите все точки, в которых касательные плоскости к поверхности параллельны одной из координатных плоскостей.
9. Найти в круге $x^2 + y^2 \le 1$ точку, в которой функция $f(x,y) = ax^2 + by^2$ имеет наибольшую скорость роста $(a > 0, b > 0)$.
10. Определить, при каких значениях параметра a функция $f(x,y) = \sin(x^2 + y^2) + 2a\,tg(xy)$ имеет экстремум в точке (0,0).
11. Найти условный экстремум функции $f(x,y) = xy^2z^3$, если $x + y + z = 12 \quad (x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0)$.
12. Найти экстремум функции $f(x,y) = x + y$ при условии $1/x + 1/y = 1$.
13. Найти условный экстремум функции $f(x,y) = x^2 + y^2$, если $x/2 + y/3 - 1 = 0$.
14. Через точку $M(2,3,5)$ провести плоскость, отсекающую треугольную пирамиду наименьшего возможного объема от координатного угла $\{x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\}$.
15. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y) = 2xy + 3y^2$ при условии $x^2 + 2y^2 = 3$.
16. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y) = x^2y$ на множестве $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$.

17. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y)=x^2-y^2$ на множестве $\{(x,y)|\,x^2+y^2\le 2x\}$.

18. Вычислить производную dF/dy,

$$F(y)=\int_{y}^{y^2+1}\frac{\sin(xy)}{x}dx,\ y>0.$$

19. Найти площадь области, отсеченной от круга $x^2+y^2\le 4$ прямой $x+y=2$ (лежащей в полуплоскости $y\ge 2-x$).

20. Определить, в каком отношении парабола $y=x^2/2$ делит площадь круга $x^2+y^2=8$.

21. Вычислить интеграл

$$\int_{AB}(x^2-2xy)dx+(2xy+y^2)dy$$

по дуге параболы $y=x^2$ от точки $A(1,1)$ до точки $B(2,4)$.

22. Вычислить

$$\oint_{L}(\cos x-y^3)dx+(x^3+\sin y)dy,$$

где L - контур, ограничивающий полукруг $x^2+y^2=R^2,\quad y\ge 0.$

22. Вычислить $\int_{L}xydS,$ где L - дуга эллипса $x^2+y^2/4=1,$ лежащая в первом квадранте.

23. Вычислить

$$\oint_{\gamma}x^2ydx+xy^2dy,$$

где $\gamma=\{x^2+y^2=R^2\},$ пробегаемый в положительном направлении.

24. Вычислить

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)}2xydx+x^2dy$$

вдоль линии $y=x^2$.

25. Вычислить площадь части поверхности $z^2 = 2xy$, лежащей над прямоугольником $0 \le x \le 3, 0 \le y \le 6$.
26. Вычислить
$$\iint\limits_G \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dxdy,$$
где $G -$ часть круга $x^2 + y^2 \le 1$, лежащая в первой четверти.
27. Переходя к полярным координатам, вычислить
$$\iint\limits_S (x^2 + y^2)\, dxdy,$$
где $S -$ область, ограниченная линией $x^2 + y^2 = 2y$.
28. Переходя к полярным координатам, вычислить
$$\iint\limits_S (x^2 + y^2)\, dxdy,$$
где $S -$ область, ограниченная линией $x^2 + y^2 = 10x$.
29. Вычислить
$$\iint\limits_S x^2 dydz + y^2 dxdz + z^2 dxdy$$
по внешней стороне сферы $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.
30. Вычислить объем тела, ограниченного сферой $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ и поверхностью $x^2 + y^2 = R(R - 2z),\ z \ge 0$.
31. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2 - 1, z = 0$.
32. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и $x^2 + y^2 = 3z$.

2 курс I семестр

1. Найти решение уравнения $y' ctg\, x + y = 2$ при условии $y(x) \xrightarrow[x \to 0]{} -1$.

Разделяя переменные, получим $\frac{dy}{2-y} = \frac{dx}{ctg\,x}$. Заметим, что $y = 2$ тоже является решением данного уравнения. Далее,

$$\int \frac{dy}{2-y} = \int \frac{dx}{ctg\,x},$$

интегрируя, имеем $\ln|2-y| = \ln|\cos x| + C,$

$$2 - y = C\cos x,$$

$$y = 2 + C\cos x.$$

Используя начальные условие, имеем $y(0) = 2 - C = -1,$
Отсюда $C = 3.$
Ответ. $y(x) = 2 - 3\cos x.$

2. Решить уравнение $e^{-s}\left(1 + \frac{ds}{dt}\right) = 1.$

$$\frac{ds}{dt} = e^s - 1,$$

$$\int \frac{ds}{e^s - 1} = \int dt,$$

$$t + C = \int \frac{(1-e^s) + e^s}{e^s - 1} ds = -\int ds + \int \frac{e^s}{e^s - 1} ds = -s + \ln|e^s - 1|,$$

$$\ln\frac{|e^s - 1|}{e^s} = t + C,$$

$$\frac{e^s - 1}{e^s} = Ce^t, \quad s = -\ln(1 - Ce^t).$$

При разделении переменных делили на множитель $e^s - 1.$
Равенство его нулю дает еще решение $s = 0.$
Ответ. $s(t) = -\ln(1 - Ce^t),\ s(t) = 0.$

3. Решить задачу Коши

$$\begin{cases}(x+2y)y'=1,\\ \quad y(0)=-1.\end{cases}$$

Сделаем замену $z = x + 2y.$ Дифференцируя это соотношение, получим

$z'=1+2y',\ y'=(z'-1)/2.$

Уравнение преобразуется к

$$z'=1+\frac{2}{z},\ \frac{dz}{dx}=\frac{z+2}{z}.$$

Разделяем переменные:

$$\frac{z}{z+2}dz = dx,$$

$$x+C=\int\frac{z}{z+2}dz = z-2\ln|z+2|.$$

Возвращаясь к переменной $y(x)$,

$$x+2y-2\ln|x+2y+2| = x+C,$$

$$\ln|x+2y+2| = y+C,$$

$$x+2y+2 = Ce^{y}.$$

Подставляя в это общее решение начальное условие $y(0)=-1,$ получаем $C=0,$ то есть решением поставленной задачи Коши будет $x+2y+2=0$.

4. Найти решение уравнения

$$3y^2y'+16x = 2xy^3,$$

удовлетворяющее условию $y(x)$ ограничено при $x\to\infty.$

Делим переменные, учитывая, что $y=2$ дает решение исходного уравнения,

$$\frac{3y^2}{y^3-3}dy = 2xdx,$$

$$\ln|y^3-8| = x^2 + C,$$

$$y^3 = 8 + Ce^{x^2},$$

$y = \sqrt[3]{6+Ce^{x^2}}$. Эта функция при $x \to \infty$ является неограниченно растущей за исключением случая $C = 0$. Таким образом, единственное решение, остающееся ограниченным – это $y = 2$.

Решить уравнение $(x^2 + y^2)y' = 2xy$. Это уравнение является однородным. Делая замену $y = tx,\ dy = xdt + tdx,$ получим $(x^2 + t^2x^2)(xdt + tdx) = 2x \cdot tx \cdot dt$. Собирая коэффициенты при dx и dt , получим $x(1+t^2)dt = (t - t^3)dx$, которое является уравнением с разделяющимися переменными.

5. Решить уравнение
   $2x(x^2 + y)dx = dy.$

   Перепишем его в виде $y' - 2xy = 2x^3$. Это линейное уравнение первого порядка. На первом этапе решаем однородное уравнение $y' - 2xy = 0$ - уравнение с разделяющимися переменными. Его общее решение есть $y_0 = Ce^{x^2}$. Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $\tilde{y}(x) = C(x)e^{x^2}$. Подставляя это выражение в исходное неоднородное уравнение, получим дифференциальное уравнение для функции $C(x)$, $C'(x) = 2x^3e^{-x^2}$. Интегрируя, имеем $C(x) = -x^2e^{-x^2} - e^{-x^2}$. Тогда частное решение $\tilde{y}(x) = -1 - x^2$, а общее решение исходного уравнения

$y(x) = Ce^{x^2} - 1 - x^2$.

6. Решить уравнение $y' = \dfrac{y}{3x - y^2}$.

Это уравнение не является линейным относительно функции $y(x)$. Однако если его рассматривать как уравнение относительно $x(y)$, то оно линейно, $x' - \dfrac{3}{y} x = -y$. (При этом $y = 0$ является решением!) Решение однородного уравнения дает $x_0(y) = Cy^3$, методом вариации произвольной постоянной находим $\tilde{x}(y) = y^2$. Таким образом, решение исходного уравнения задано неявным соотношением $x = y^2 + cy^3, y = 0$.

7. Решить уравнение
$xy' + (x+1)y = 3x^2 e^{-x}$.
Это линейное уравнение первого порядка. Решением однородного уравнения будет функция $y_0(x) = \dfrac{C}{xe^x}$. Поиск решения методом вариации произвольной постоянной дает $C(x) = x^3$, $\tilde{y}(x) = x^2 e^{-x}$. Однако в этом случае можно искать частное решение другим путем. Правая часть представляет собой квазиполином (то есть полином, умноженный на экспоненту). Будем искать частное решение неоднородного уравнения в аналогичном виде, $\tilde{y}(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$. Подставляя эту формулу в исходное уравнение, получим равенство

$$\left((2ax+b)e^{-x} - (ax^2+bx+c)e^{-x}\right)x +$$

$$+ (x+1)(ax^2+bx+c)e^{-x} = 3x^2 e^{-x},$$

$$2ax^2 + bx + ax^2 + bx + c = 3x^2,$$

которое должно быть выполнено при любых значениях x.
Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему для определения коэффициентов в решении

$$\begin{cases} 3a = 3, \\ 2b = 0, \\ c = 0, \end{cases}$$

решением которой будет $a = 1, b = c = 0$, то есть получаем частное решение $\tilde{y}(x) = x^2 e^{-x}$. Окончательно

$$y(x) = \left(\frac{C}{x} + x^2\right)e^{-x}.$$

8. Решить уравнение

$$2xydx + (x^2 + 3y^2)dy = 0.$$

Поскольку $(2xy)_y = 2x = (x^2 + 3y^2)_x$, то это уравнение в полных дифференциалах. Найдем потенциал $U(x, y)$ из условия $U_x = 2xy$,

$U(x, y) = \int 2xy\,dx = x^2 y + \varphi(y)$. Далее, дифференцируя полученное выражение по y и приравнивая к $U_y = (x^2 + 3y^2),$ имеем соотношение для определения постоянной интегрирования $\varphi(y)$,

$$x^2 + \varphi'(y) = x^2 + 3y^2,$$

Отсюда $\varphi(y) = y^3$, $U(x, y) = x^2 y + y^3$.
Можно было действовать иначе. Аналогично

$$U(x, y) = \int 2xy\,dx = x^2 y + \varphi(y)$$

интегрируя $(x^2 + 3y^2)$ по y, находим

$$U(x, y) = \int (x^2 + 3y^2)\,dy = x^2 y + y^3 + \psi(x).$$

Сравнивая полученные выражения в правых частях интегралов, получаем то же самое выражение для потенциала. (Отметим, что потенциал всегда ищется с точностью до постоянной.) Тогда решение уравнения записывается в неявной форме $x^2 y + y^3 = C$.

9. Решить уравнение
$(x^2 + 2x + y)dx = (x - 3x^2 y)dy.$
Это уравнение не является уравнением в полных дифференциалах,
$M_y = (x^2 + 2x + y)_y = 1,\ N_x = -(x - 3x^2 y)_x = -1 + 6xy \neq M_x.$

Будем искать интегрирующий множитель из условия $(\mu M)_y = (\mu N)_x$. Интегрирующий множитель легко найдется, если он функция только одного переменного. Попытаемся искать $\mu = \mu(x)$. Тогда
$\mu(x) M_y = \mu'(x) N + \mu N_x$.
$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{M_y - N_x}{N} = \frac{1 + 1 - 6xy}{-(x - 3x^2 y)} = \frac{2(1 - 3xy)}{-x(1 - 3xy)} = -\frac{2}{x}.$$
Решая это уравнение (с разделяющимися переменными), получим $\mu = x^{-2}$.
Проверим, что мы действительно нашли интегрирующий множитель. Деля уравнение на x^2, получим соотношение $\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{y}{x^2}\right)dx - \left(\frac{1}{x} - 3y\right)dy = 0$, которое действительно является уравнением в полных дифференциалах, так как $\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{y}{x^2}\right)_y = -\frac{1}{x^2} = -\left(\frac{1}{x} - 3y\right)_x$. Далее оно достаточно легко решается.
Ответ. $3y^2/2 - y/x + x + \ln x^2 = C.$

10. Построить три последовательных приближения к решению задачи Коши

$$\begin{cases} y' = y + e^{y-1}, \\ \quad y(0) = 1. \end{cases}$$

Воспользуемся равносильным интегральным уравнением, которое позволяет организовать итерационный процесс. Тогда

$y_0 = 1$ (константа из начального условия),

$$y_1(x) = y_0 + \int_0^x (1 + e^{1-1})ds = 1 + 2x,$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_0^x (1 + 2s + e^{1+2s-1})ds = 1 + \left(s + s^2 + \frac{e^{2s}}{2} \right)\Bigg|_0^x =$$

$$= 1 + x + x^2 + \frac{e^{2x}}{2}.$$

Отметим, что графики всех этих функций проходят через точку (0,1).

11. Для задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = t + e^x, \\ \quad x(1) = 0 \end{cases}$$

указать какой-нибудь промежуток существования решения. Выберем $a = 1, b = 1.$ На плоскости (t, x) зададим прямоугольник с центром в точке (1,0): $|t - 1| < 1, |x| < 1$. Тогда правая часть в этом прямоугольнике ограничена константой $M = 2 + e$. По теореме существования и единственности мы можем гарантировать существования непрерывно-дифференцируемого решения на промежутке $|t - t_0| < d$, где

$d = \min(a, b / M) = \min(1, (1 + e)^{-1}) = (1 + e)^{-1} \approx 1/4$, то есть существенно меньше исходного интервала $|t - t_0| < a$.

Увеличим область задания правой части, возьмем $a = 2$. Однако это приведет только к увеличению константы M, мажорирующей функцию, $M_1 = 1 + e^2$, и к уменьшению области существования решения:

$d_1 = \min(a, b/M_1) = \min(2, (1+e^2)^{-1}) = (1+e^2)^{-1} \approx 1/10$.

12. Решить уравнение

$8y'^3 = 27y.$

Разрешая уравнение относительно производной и решая получающееся уравнение с разделяющимися переменными, получим $y^{2/3} = x + C.$ Отсюда $y^2 = (x+C)^3.$ Помимо этого, функция $y = 0$ тоже является решением.

13. Решить уравнение

$yy'' + y'^2 = 1.$

Замечая, что левая часть уравнения есть производная по x от yy', получим

$yy' = x + C_1.$ Отсюда, решая уравнение с разделяющимися переменными, имеем

$\int ydy = \int (x + C_1)dx,$

$y^2 = x^2 + C_1 x + C_2.$

14. Решить уравнение

$y' y''' = 2y''^2.$

Делим уравнение на $y' y'',$ замечая, что $y'' = 0$ дает решение исходного уравнения. (Это соответствует $y = C_1 x + C_2$.)

Получаем $\dfrac{y'''}{y''} = 2\dfrac{y''}{y'}$, интегрирование дает

$\ln y'' = 2\ln y' + C_3$, $y'' = C_3 y'^2.$ Деля получившееся соотношение на y' и интегрируя, аналогично имеем

$\ln y' = C_3 y + C_4$, то есть $y' = e^{C_3 y + C_4} = C_4 e^{C_3 y}$.

Далее, разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\int \frac{dy}{e^{C_3 y}} = C_4 x, \; -\frac{e^{-C_3 y}}{C_3} = C_4 x + C_5, \; e^{-C_3 y} = C_3 C_4 x + C_5 C_3.$$ Это

решение можно представить в форме

$C_3 y = \ln |C_4 x + C_5| + C_3$.

15. Решить уравнение

$y'' + 4y' + 3y = 0.$

Соответствующее характеристическое уравнение есть

$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0.$ Его корни - числа -1 и -3. Тогда общее решение уравнения выглядит следующим образом:

$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}.$

16. Решить уравнение

Выписываем характеристическое уравнение

Корни этого уравнения -

$\lambda_1 = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}},$

$\lambda_2 = \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}},$

$\lambda_3 = \sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{4}},$

$\lambda_4 = \sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{4}},$

что есть $\pm 1 \pm i.$ Тогда общее решение уравнения

$y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{-x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x).$

17. Решить уравнение

$y'' + 4y' + 4y = xe^{2x}.$

Решая соответствующее однородное уравнение, получаем $y_0 = (C_1 + C_2 x) e^{-2x}$. Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде правой части,

$\tilde{y} = (ax + b) e^{2x}.$ Подставляя это выражение для решения в исходное неоднородное уравнение и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x,$ получим

$a=1/16, b=-1/32.$ Таким образом, общее решение неоднородного уравнения есть

$$y=\left(\frac{x}{16}-\frac{1}{32}\right)e^{2x}+(C_1+C_2x)e^{-2x}.$$

18. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}=x+y, \\ \dot{y}=3y-2x. \end{cases}$$

Собственные числа матрицы системы есть $2\pm i$.
Собственные вектор, соответствующий собственному числу $2+i$, будет

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$. Тогда решение, соответствующее этому

собственному числу, имеет вид $Y=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{(2+i)t} \\ (1+i)e^{(2+i)t} \end{pmatrix}.$

Отделяя вещественную и мнимую части, получим фундаментальную систему решений

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_1=\operatorname{Re}Y=\begin{pmatrix} \cos t\, e^{2t} \\ (\cos t-\sin t)e^{2t} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_2=\operatorname{Im}Y=\begin{pmatrix} \sin t\, e^{2t} \\ (\cos t+\sin t)e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует формула для общего решения

$$x=C_1e^{2t}\cos t+C_2e^{2t}\sin t,$$

$$y=C_1e^{2t}(\cos t-\sin t)+C_2e^{2t}(\sin t+\cos t).$$

19. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}=2x-4y, \\ \dot{y}=x-3y+3e^{t}. \end{cases}$$

Находя собственные числа и собственные вектора матрицы системы, составляем общее решение однородной системы,

$x_0 = 4C_1 e^t + C_2 e^{-2t}$,

$y_0 = C_1 e^t + C_2 e^{-2t}$.

Частное решение неоднородной системы можно искать, например, методом вариации произвольных постоянных в виде

$\tilde{x} = 4C_1(t)e^t + C_2(t)e^{-2t}$,

$\tilde{y} = C_1(t)e^t + C_2(t)e^{-2t}$.

Подставляя это представление решения в исходную систему, получаем линейную неоднородную систему уравнений для определения $C_1'(t)$ и $C_2'(t)$,

$$\begin{cases} 4C_1' e^t + C_2' e^{-2t} = 0, \\ C_1' e^t + C_2' e^{-2t} = 3e^t. \end{cases}$$

Отсюда $C_1' = -1,\ C_2' = 4e^{3t}$, тогда $C_1 = -t,\ C_2 = 4e^{3t}/3$.

Частное решение неоднородной системы

$\tilde{x} = -4te^t + 4e^t/3$,

$\tilde{y} = -te^t + 4e^t/3$.

Общее решение неоднородной системы найдем как сумму общего решения однородной системы и частного решения неоднородной,

$x = e^t(4/3 - 4t + 4C_1)$,

$y = e^t(4/3 - t + C_1) + C_2 e^{-2t}$.

Можно искать частное решения в виде специальной правой части,

$\tilde{x} = Q_{m+s}(t)e^{\gamma t}$,

$\tilde{y} = Q_{m+s}(t)e^{\gamma t}$.

Для нашей системы $m = 0,\ \gamma = 1$ - корень (простой) характеристического уравнения, поэтому $s = 1$. Подстановка частного решения

$$\begin{cases} \tilde{x} = (\alpha t + \beta)e^t, \\ \tilde{y} = (\gamma t + \delta)e^t. \end{cases}$$

в исходную неоднородную систему приводит к

$$\begin{cases} \alpha e^t + (\alpha t + \beta)e^t = 2(\alpha t + \beta)e^t - 4(\gamma t + \delta)e^t, \\ \gamma e^t + (\gamma t + \delta)e^t = (\alpha t + \beta)e^t - 3(\gamma t + \delta)e^t + 3e^t. \end{cases}$$

Приравнивание коэффициентов при степенях t дает $\alpha = -4,\ \beta = -8,\ \gamma = -1 = \delta$, то есть частное решение будет

$$\begin{cases} \tilde{x} = (4t - 8)e^t, \\ \tilde{y} = (-t - 1)e^t. \end{cases}$$

Отметим, что разница между этим частным решением и приведенным ранее есть одно из решений однородной системы.

20. Найти положения равновесия системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 3 - \sqrt{4 + y + x^2}, \\ \quad \dot{y} = \ln(x^2 - 3) \end{cases}$$

и исследовать их на устойчивость.
Для определения положений равновесия приравняем правые части системы к 0,

$$\begin{cases} f(x, y) \equiv 3 - \sqrt{4 + y + x^2} = 0, \\ \quad g(x, y) \equiv \ln(x^2 - 3) = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим две точки покоя, $A_1(-2,1),\ A_2(2,1).$ Для решения вопроса об устойчивости этих положений равновесия находим матрицу Якоби

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{x}{\sqrt{4 + x^2 + y}} & -\dfrac{1}{2\sqrt{4 + x^2 + y}} \\ \dfrac{2x}{x^2 - 3} & 0 \end{pmatrix}$$

и вычисляем ее для каждой точки. Знак вещественной части собственных чисел определяет устойчивость.

$$J\big|_{A_1} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} & -\dfrac{1}{6} \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$$

Одно из собственных значений имеет положительную вещественную часть, поэтому точка A_1 - неустойчивое положение равновесия.

$$J\Big|_{A_2} = \begin{pmatrix} -\dfrac{2}{3} & -\dfrac{1}{6} \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{5}}{3}.$$ Корни характеристического уравнения комплексно сопряженные, $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} = -1/3$, поэтому точка покоя A_2 устойчива.

21. Решить уравнение

$$(x-z)\frac{\partial u}{\partial x} + (y-z)\frac{\partial u}{\partial y} + 2z\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Составляем систему уравнений характеристик

$\dfrac{dx}{x-z} = \dfrac{dy}{y-z} = \dfrac{dz}{2z} = \dfrac{du}{0}$ и находим ее первые интегралы,

1). $\dfrac{dx-dy}{x-z-(y-z)} = \dfrac{dz}{2z},$

$$\int\frac{d(x-y)}{x-y} = \int\frac{dz}{2z}, \quad \ln\frac{(x-y)^2}{z} = C_1, \quad \frac{(x-y)^2}{z} = C_1.$$

2). $\dfrac{dx+dz}{x+z} = \dfrac{dy+dz}{y+z},$

$$\int\frac{d(x+z)}{x+z} = \int\frac{d(y+z)}{y+z}, \quad \ln\frac{x+z}{y+z} = C_2, \quad \frac{x+z}{y+z} = C_2.$$

3). $u = C_3$. Поскольку u входит только в один из первых интегралов, решение можно представить в виде

$$u = F\left(\frac{(x-y)^2}{z}, \frac{(x+z)}{y+z}\right).$$

7. Учебно-методическое обеспечение дисциплины

Рекомендованная литература к теоретическому курсу

а) основная литература:

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление. Ростов-на-Дону: изд-во «Феникс», 1997 г.

2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного: учебник для вузов. Ростов-на-Дону: изд-во «Феникс», 1998 г., 4-е изд.

3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. М., Наука, 1985.
4. Тихонов А.Н., Самарский А.А.Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
5. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. Едиториал УРСС, 2007 г.
6. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Либроком, 2009 г.

7. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М., Наука.
8. Шилов Г.Е.. Математический анализ. М., Наука.

9. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения. ЛКИ, 2008 г.

б***) дополнительная литература:***

1. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. М., Мир.
2. Гильдерман Ю.И. Лекции по высшей математике для биологов. Новосибирск: Наука, 1974.

3. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. М., Мир, 1986.

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Персональные компьютеры, мультимедийный проектор, ноутбуки, экраны.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО с учетом рекомендаций ПрООП ВПО по направлению «020400 БИОЛОГИЯ», квалификация (степень) «бакалавр», а также в соответствии с Образовательным стандартом высшего профессионального образования принятым в Федеральном государственном образовательном бюджетном учреждении высшего профессионального образования Новосибирский государственный университет.

Авторы: Фокин Михаил Валентинович, д.ф.-м.н., декан ММФ, профессор кафедры высшей математики ММФ НГУ, заместитель директора ИМ СО РАН;
Мальцева Жанна Львовна, к.ф.-м.н., доцент кафедры высшей математики ММФ НГУ, старший научный сотрудник ИГиЛ СО РАН.

Рецензент Волков Ю.С., профессор кафедры высшей математики НГУ, ученый секретарь ИМ СО РАН.